-

FICHE DE COURS
CHAPITRE SUR LES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 2ND ORDRE

Table des matières

CE QU'IL FAUT RETENIR

- Solutions d'une équation du second degré sur C:

Si $az^2 + bz + c = 0$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$: **le discriminant**

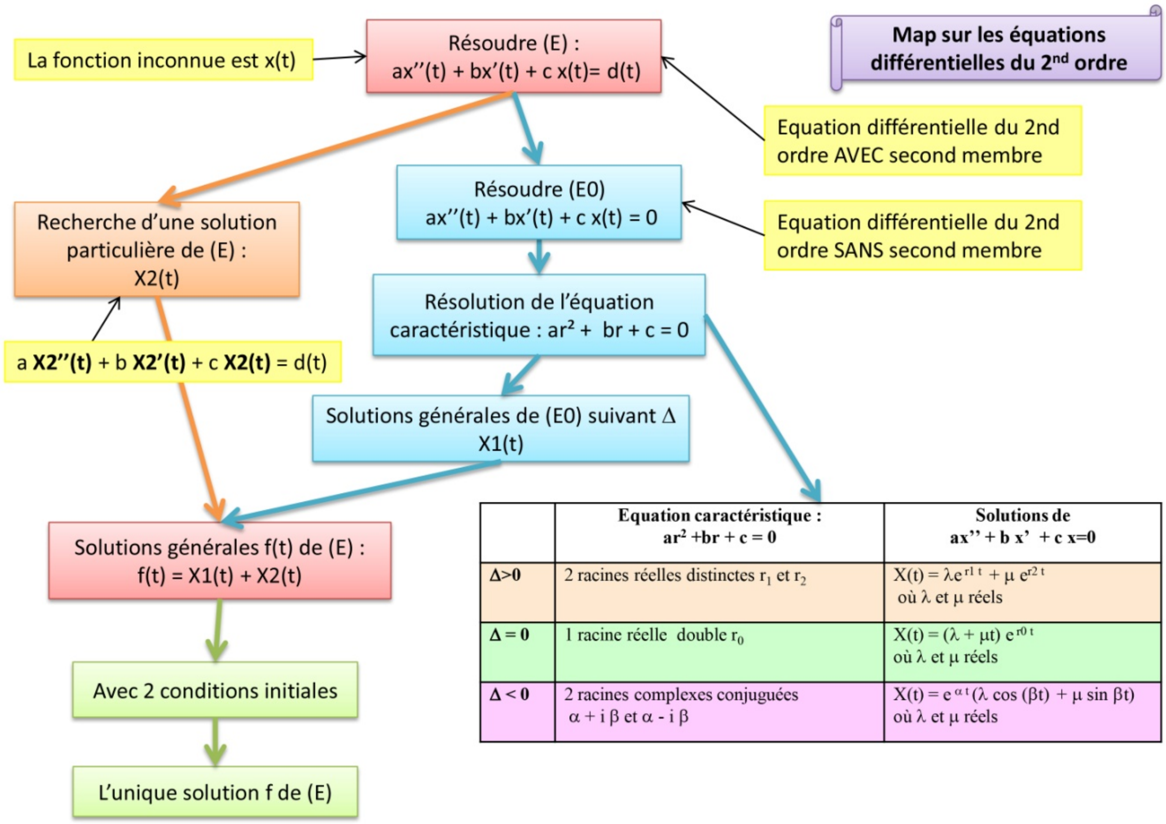
	Nombre et type de solutions	Forme des solutions
$\Delta > 0$	**Il existe deux solutions REELLES**	$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	**Il existe une solution REELLE DOUBLE**	$z_0 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	**Il existe deux solutions COMPLEXES CONJUGUÉES**	$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$

- Solutions générales de $a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = 0$:

Equation caractéristique : $a\,r^2 + br + c = 0$

$\Delta > 0$	$x(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$	où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
$\Delta = 0$	$x(t) = (\lambda t + \mu)\, e^{r_0 t}$	où r_0 sont la racine double de l' équation caractéristique
$\Delta < 0$	$x(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))\, e^{\alpha t}$	où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes de l' équation caractéristique

P de synthèse sur les équations différentielles du 2^{nd} ordre AVEC second membre :



	Equation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$	**Solutions de** $ax'' + b x' + c x = 0$
$\Delta > 0$	2 racines réelles distinctes r_1 et r_2	$X(t) = \lambda e^{r1\,t} + \mu\, e^{r2\,t}$ où λ et μ réels
$\Delta = 0$	1 racine réelle double r_0	$X(t) = (\lambda + \mu t)\, e^{r0\,t}$ où λ et μ réels
$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$X(t) = e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin \beta t)$ où λ et μ réels

1094

COURS

1. Les définitions :

Définition : On considère une fonction x définie par : $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto x(t) \end{cases}$, fonction dérivable sur I

Equation différentielle linéaire du second ordre (E) AVEC second membre à coefficients constants : une équation du type : ax''(t) + b x' (t) + c x(t) = d (t) où a,b,c sont des constantes réelles (a ≠ 0) , et d est une fonction définie sur I et dérivable sur I, sachant que l'inconnue est la fonction x(t).

Equation différentielle du second ordre SANS second membre (E') : ax''(t) + b x' (t) + c x(t) = 0

Une solution f de l'équation différentielle : ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d(t) est telle que :
Lorsque l'on remplace f par la fonction x(t), elle doit vérifier l'égalité c'est-à-dire que :

af ''(t) + bf '(t) + c f(t) = d(t)

Remarque : si lorsque l'on simplifie : af ''(t) + bf '(t) + c f(t), on n'obtient pas d(t) alors f n'est pas solution particulière.

3221

Exemple 1 :

Partie A : On considère l'équation différentielle (E) x'' (t) – 4x'(t) + 3x(t) = $-3t^2$ + 2t où x est une fonction de la variable t, dérivable deux fois.

a)déterminer l'équation sans second membre (E') associée à (E)

1296

b) déterminer les valeurs de a, b, c et d(t).

1297

c)Vérifier que la fonction f(t) = $-t^2$ – 2t – 2 est une solution particulière de cette équation différentielle (E)

3222

Partie B : On considère l'équation différentielle : 2y''(x) – 2 y(x) = - 4xe^{-x} (E).

a)Trouver l'équation sans second membre associée.

1300

b) déterminer les valeurs de a, b, c et d(x).

1301

Partie C : Dans un circuit RLC, on sait que le système vérifie l'équation différentielle : L $\frac{d^2q(t)}{dt^2}$ + R $\frac{dq(t)}{dt}$ + $\frac{q(t)}{C}$ = 0

a) Comment s'appelle cette équation différentielle ?

1302

b) déterminer les valeurs de a, b et c.

1303

Exemple 2 : Soit x est une fonction de la variable t, dérivable 2 fois.
On considère l'équation différentielle (E) :

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 5\cos t$$

Trouver 2 réels A et B tel que $g(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ soit une solution particulière de (E)

249

Dans toute la suite, on note x la fonction que l'on va chercher. x vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $ax''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = d(t)$ que l'on note (E).

2. Résolution de l'équation différentielle sans second membre (E') : ax'' (t) + b x'(t) + c x(t) = 0

Définition :
Equation caractéristique associée à l'équation différentielle sans second membre (E') :

$$ax''(t) + bx'(t) + c\,x(t) = 0$$

$$\boxed{a\,r^2 + br + c = 0}$$

239

Rappel : résolution d'une équation du 2nd degré sur C :
On considère, sur C, l'équation du second ordre : $az^2 + bz + c = 0$
avec a, b, c des nombres **réels**.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$: **le discriminant**

686

	Nombre et type de solutions	**Forme des solutions**
$\Delta > 0$	**Il existe deux solutions REELLES**	$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	**Il existe une solution REELLE DOUBLE**	$z_0 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	**Il existe deux solutions COMPLEXES CONJUGUÉES**	$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$

En résumé : (extrait du formulaire)

$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

Exemple 3 : Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$

241

b) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$

242

c) $y''(t) + 4y(t) = 0$

243

d) $\frac{d^2 i(t)}{dt^2} - 2\,\frac{di(t)}{dt} + 10\,i(t) = 0$

3224

3. Solutions générales de l'équation différentielle (E) : ax''(t) + bx'(t) + c x(t) = d(t)

1261

Théorème :
Les solutions générales de l'équa. diff. du 2nd ordre (E) ax''(t) + bx' (t)+ c x(t)= d(t) est obtenue en faisant **la SOMME**
- d'une **solution particulière de (E)** et
- de la **solution générale de l'équation différentielle « sans second membre »** (E')

$$ax''(t) + b x'(t) + c x(t) = 0$$

Exemple 4 : On considère l'équation différentielle (E) : y'' (x) – 3 y'(x) + 2 y(x) = - 4e^{2x} où y est une fonction de la variable x, dérivable deux fois.

1. Résoudre l'équation différentielle : y'' – 3 y' + 2 y = 0 (E') 1318
2. Trouver le réel a tel que g(x) = ax e^{2x} soit une solution de (E) 3225
3. En déduire les solutions générales de (E). 1321

4. Existence et unicité de la solution vérifiant les conditions initiales (CI) données

Théorème : Il existe une unique solution à l'équation différentielle **ax''(t) + bx'(t) + c x(t) = d(t)** vérifiant **2 conditions particulières**, appelées **conditions initiales**.
Ces deux conditions permettront de déterminer les valeurs exactes de λ *et* μ, les coefficients inconnus obtenus lors de la résolution de l'équation différentielle du 2nd ordre sans second membre.

1094

Exemple 5 : Soit x est une fonction de la variable t, dérivable 2 fois.
On considère l'équation différentielle (E) : x''(t) – 4x'(t) + 3x(t) = -3t^2 + 2t avec x(0) = 0 et x'(0) = 0

1. Résoudre l'équation différentielle : x''(t) – 4x'(t) + 3x(t) = 0 (E') 1311
2. Trouver 3 réels A, B et C tel que P(t) = At^2 + Bt + C soit une solution particulière de (E) 2151
3. En déduire les solutions générales de (E). 1315
4. Déterminer la solution de (E) tel que x(0) = 0 et x'(0) = 0 244

Synthèse pour la résolution des équations différentielles du second ordre

<table>
<tr>
<td></td>
<td>EQUA. DIFF. DU 2ND ORDRE
3227</td>
<td>Exemple :
On veut résoudre l'équa. Diff. (E) :
$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2e^{-x}$
sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>SANS 2nd membre</td>
<td>$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = 0$</td>
<td>$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>1/ Solutions générales de l'équa. diff. SANS 2nd membre</td>
<td>Equation caractéristique :
$a\,r^2 + b\,r + c = 0$
<table>
<tr><td></td><td>Résoudre l'éq. Caract. $ar^2 + br + c = 0$</td><td>Solutions de $ax'' + b\,x' + c\,x = 0$</td></tr>
<tr><td>$\Delta>0$</td><td>2 racines réelles
r_1 et r_2</td><td>$x(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t}$
où λ et β réels</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td>1 racine réelle
$r_0 = \frac{-b}{2a}$</td><td>$x(t) = (\lambda + \mu t)\, e^{r_0 t}$
où λ et β réels</td></tr>
<tr><td>$\Delta<0$</td><td>2 racines cplx conj.
$r_1 = \alpha + i\,\beta$ et $r_2 = \alpha - i\,\beta$</td><td>$x(t) = e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin \beta t)$
où λ et β réels</td></tr>
</table>
</td>
<td>Equation caractéristique :
$r^2 + 2\,r + 1 = 0$
Donc $\Delta = 0$ donc $r = -1$ (racine double)
Donc les solutions générales de (E') sont
$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{-x}$</td>
</tr>
<tr>
<td>AVEC 2nd membre</td>
<td>$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = d(t)$</td>
<td>$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2e^{-x}$</td>
</tr>
<tr>
<td>2/ Solution particulière f de l'équa. Diff. (E)</td>
<td>On cherche f telle que :
$a\,f''(t) + b\,f'(t) + c\,f(t) = d(t)$</td>
<td>On va chercher la solution particulière f sous la forme $f(x) = k\,x^2\,e^{-x}$ où k est un réel à déterminer.
$f(x) = k\,x^2\,e^{-x}$ (attention c'est un produit !!) ;
$f'(x) = 2k\,x\,e^{-x} - k\,x^2e^{-x} = (2k\,x - kx^2)e^{-x}$
(attention il y a encore des produits !!) ;
$f''(x) = (2k - 2xk)\,e^{-x} - (2k\,x - kx^2)\,e^{-x}$
$= (k\,x^2 - 4\,k\,x + 2\,k\,)e^{-x}$
Donc
$f''(x) + 2f'(x) + f(x)$
$= (k\,x^2 - 4\,k\,x + 2\,k\,)e^{-x} + 2(2k\,x - kx^2)e^{-x}$
$+ k\,x^2\,e^{-x}$ (on simplifie au maximum)
$= 2\,k\,e^{-x} = 2e^{-x}$ (d'après l'énoncé)
Donc $2k = 2 \Rightarrow k = 1$.
Donc la solution particulière est :
$f(x) = x^2\,e^{-x}$</td>
</tr>
<tr>
<td>3/ solutions générales de l'équa. diff. AVEC 2nd membre</td>
<td>1/ recherche des solutions générales de l'équa. Diff. SANS second membre
2/ recherche d'une solution particulière de l'équation AVEC second membre
3/ Les solutions générales de l'équa. AVEC second membre résulte de la SOMME des fonctions obtenues au 1/ et 2/</td>
<td>Donc les solutions générales de (E) sont de la forme :
$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{-x} + x^2\,e^{-x}$
$= (\lambda + \mu x + x^2\,)e^{-x}$</td>
</tr>
<tr>
<td>4/ obtenir la solution unique de (E)</td>
<td>Grâce à 2 conditions initiales du type
$x(t_0) = y_0$ et $x'(t_1) = y_1$
On pourra déterminer les valeurs de λ et μ .</td>
<td>On veut maintenant trouver y(x) solution de (E) telle que : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$
Or les solutions de (E) sont :
$y(x) = (\lambda + \mu x + x^2\,)e^{-x}$
si $y(0) = 1$ alors $y(0) = \lambda\, e^0 = \lambda = 1$
si $y'(0) = 1$
$y'(x) = (\mu + 2x)e^{-x} - (\lambda + \mu x + x^2\,)e^{-x}$
donc $y'(0) = \mu e^0 - \lambda e^0 = \mu - \lambda = 1$
or $\lambda = 1$ donc $\mu = 2$. Donc la solution de (E) est : $y(x) = (1 + 2x + x^2\,)e^{-x}$</td>
</tr>
</table>

EXERCICES

Exercice 1 :

On considère y la fonction définie sur IR, de la variable x, dérivable sur IR, vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$9y''(x) - y(x) = 4.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $9y''(x) - y(x) = 0$

   243

2. déterminer la solution particulière h de (E) sous la forme d'une constante

3. En déduire les solutions générales de (E).

   1261

4. Déterminer la fonction y solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

   244

Exercice 2 :

On considère y la fonction définie sur IR, de la variable t, dérivable sur IR, vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$y''(t) + 2y'(t) = (4 + 3t)e^{t}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''(t) + 2y'(t) = 0$ (E')

   1318

2. Déterminer le réel A tel que $f(t) = At\,e^{t}$ soit une solution particulière de (E)

   3225

3. En déduire les solutions générales de (E).

   1321

Exercice 3 :

On considère x la fonction définie sur IR, de la variable t, dérivable sur IR, vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$x''(t) + 4x(t) = - 6 \sin(t).$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $x''(t) + 4x(t) = 0$

   241

2. Déterminer les réels A et B tel que la solution particulière g de (E) s'écrive sous la forme : $g(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$

   249

3. En déduire les solutions générales de (E).

   248

4. Déterminer la fonction x, solution de (E), vérifiant $x(0) = -1$ et $x'(0) = 0$

   244

CORRECTIONS

Exercice 1 :

1. (E_0) : $9y''(x) - y(x) = 0$

C'est l'équation différentielle du 2^{nd} ordre sans second membre associée à (E) . avec **a = 9 ; b = 0 ; c = -1**

Equation caractéristique : $9r^2 - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4\times9\times(-1) = 36 > 0$

Donc on a deux solutions réelles : $\mathbf{r_1} = \frac{-1}{3}$ **et** $\mathbf{r_2} = \frac{1}{3}$

Donc les solutions de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{y(t)} = \boldsymbol{\lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{\frac{-t}{3}}}$ avec λ et μ deux **constantes réelles.**

2. Si h est constante alors $h(x) = A$ donc $h'(x) = h''(x) = 0$.

On remplace h dans l'équation (E) car elle est solution particulière de (E).
D'où : $9h''(x) - h(x) = 4 \Longrightarrow 9 \times 0 - A = 4 \Longrightarrow -A = 4$ donc $A = -4$
Donc la fonction constante solution de l'équation différentielle (E) est **h(x)** = A= **- 4**

3. Avec la question 1 et 2, on en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :
   $\mathbf{y(t)} = \boldsymbol{\lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{\frac{-t}{3}}}$ **- 4** avec λ et μ deux **constantes réelles.**

4. D'après la question 3, les solutions de (E) sont de la forme : $y(t) = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{\frac{-t}{3}} - 4$

Si $y(0) = 0$ alors $y(0) = \lambda e^{\frac{0}{3}} + \mu e^{\frac{-0}{3}} - 4 = \lambda + \mu - 4 = 0$ car $e^0 = 1$ donc $\boldsymbol{\lambda + \mu = 4}$
Si $y'(0) = 0$ alors on a besoin de $y'(t)$: $y'(t) = \frac{\lambda}{3} e^{\frac{t}{3}} - \frac{\mu}{3} e^{\frac{-t}{3}}$
Donc $y'(0) = \frac{\lambda}{3} e^{\frac{0}{3}} - \frac{\mu}{3} e^{\frac{-0}{3}} = \boldsymbol{\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{3} = 0}$ car $e^0 = 1$
D'où $\begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{cases}$
Donc la solution est : $\mathbf{y(t)} = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{\frac{-t}{3}} - 4 = \boldsymbol{2e^{\frac{t}{3}} + 2e^{\frac{-t}{3}}}$ **- 4**

Exercice 2 :

1/ Recherche des solutions de $y''(t) + 2y'(t) = 0$
C'est l'équation différentielle sans second membre associée à (E) avec **a = 1 ; b = 2 ; c = 0.**
Equation caractéristique : $r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r + 2) = 0$ donc $r = 0$ ou $r = -2$
Donc les solutions de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(t) = \lambda e^{0t} + \mu e^{-2t} = \lambda + \mu e^{-2t}$ avec λ et μ 2 **constantes réelles.**

2/ Si $f(t) = Ate^t$ soit une solution particulière de (E) alors f doit vérifier $f''(t) + 2f'(t) = (4 + 3t)e^t$
On a donc besoin de :

- $\mathbf{f'(t) = Ae^t + Ate^t}$ (attention f est mise sous la forme d'un produit ! revoir la dérivée d'un produit !!)
- $\mathbf{f''(t)} = Ae^t + Ae^t + Ate^t = \mathbf{2\,Ae^t + Ate^t}$

Donc $f''(t) + 2f'(t) = 2\,Ae^t + Ate^t + 2(Ae^t + Ate^t) = 4\,Ae^t + 3Ate^t = A(4 + 3t)e^t = (4 + 3t)e^t$
Donc par identification $A = 1$

D'où la solution particulière sera : $\mathbf{f(t)} = Ate^t = \mathbf{te^t}$

3/ Donc les solutions générales de (E), avec la question 1 et 2, sont de la forme : $\mathbf{y(t)} = \boldsymbol{\lambda + \mu e^{-2t}} + \mathbf{te^t}$

Exercice 3 :

1. (E_0) : $x''(t) + 4x(t) = 0$.

C'est l'équation différentielle sans second membre associée à (E) **avec a = 1 ; b = 0 ; c = 4**
Equation caractéristique : $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4\times1\times4 = -16 < 0$

Donc on a deux solutions complexes conjuguées : **r_1 = 2i et r_2 = -2i**
Pour r_1 : la partie réelle est : $\boldsymbol{\alpha = 0}$ et la partie imaginaire est : $\boldsymbol{\beta}$ = 2
Donc les solutions de (E') sont définies sur ℝ par :
$x(t) = e^{0t}(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t))$ = **$\boldsymbol{\lambda}$cos (2t) + $\boldsymbol{\mu}$sin (2t)** avec λ et μ deux **constantes réelles.**

2. Si g(t) = A cos t + B sin t est solution de (E) alors g vérifie l'équation différentielle : g ''(t) + 4 g(t) = - 6 sin(t)

On a alors besoin de calculer :

- g '(t)= - A sin t + B cos t
- g''(t) = - Acos t - B sin t

Donc g ''(t) + 4 g(t) = - A cos t - B sint + 4(A cost + B sint) = - 6 sin(t) ⇔ 3 Acost + 3B sin t = - 6 sin t
⇒ Par identification : $\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \end{cases}$ donc g(t) = A cos t + B sin t = - 2sin (t)

3. Avec la question 1 et 2, on en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

x(t) = $\boldsymbol{\lambda}$cos (2t) + $\boldsymbol{\mu}$sin (2t) - 2sin (t) où λ et μ sont des **constantes réelles quelconques.**

4. On cherche la solution de (E) donc d'après la question 3 : **x(t) = $\boldsymbol{\lambda}$cos (2t) + $\boldsymbol{\mu}$sin (2t) - 2sin (t)**

Or x(0) = -1 ⇒ x(0) = λcos (0) + μsin (0) - 2sin(0) = -1 ⇒ λ = - 1 car cos(0) = 1 et sin(0) = 0
Pour x'(0) = 1, on a besoin de calculer x'(t) :
x'(t) = -2λ sin (2t) + 2μ cos (2t) – 2cos(t) ⇒ x'(0) = -2λ sin (0) + 2μ cos (0) - 2cos(0) = 0 ⇒ $2\mu - 2 = 0$ ⇒ $\mu = 1$

Donc la solution particulière de l'équation différentielle (E) est :

x(t) = **$\boldsymbol{\lambda}$cos (2t) + $\boldsymbol{\mu}$sin (2t) - 2sin (t)** = - cos (2t) + sin(2t) – 2sin (t)

cos (2t) + sin(2t) – 2sin (t)