EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

1. définition :

Définition :

On considère une fonction x définie par : $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto x(t) \end{cases}$, fonction dérivable sur I

Equation différentielle linéaire du premier ordre (E) : a x'(t) + b x(t) = c(t) avec a et b deux réels et c(t) une fonction.

La fonction inconnue est x(t) que l'on va chercher à déterminer en résolvant cette équation différentielle.

Equation différentielle du premier ordre sans second membre (E_0) : a x'(t) + b x(t) = 0

Une solution f de l'équation différentielle a x'(t) + b x(t) = c(t) est telle que : a f '(t) + b f(t) = c(t).

Exemple 1:

On considère l'équation différentielle du premier ordre : 2x'(t) + x(t) = $\frac{1}{2}$ (E)

1. Déterminer les valeurs de a ; b et c(t).
2. Donner l'équation différentielle sans second membre (E_0).
3. Vérifier que la fonction x(t) = $\frac{1}{2}$ est une solution de l'équation différentielle (E)

Exemple 2 :

1. Trouver une fonction constante solution de : 4y' – y = 10.
2. Déterminer trois réels A, B, C tel que g(x) = Ax² + Bx + C soit solution de l'équation différentielle :
   y'(x) + y(x) = 2x² + 3x – 2.

Dans toute la suite, on note x la fonction que l'on va chercher.
La fonction x, de la variable t, vérifie alors l'équation différentielle linéaire du premier ordre noté (E):
a x'(t) + b x(t) = c(t) avec a et b 2 constantes et c(t) une fonction.

2. Résolution de l'équation différentielle sans second membre (E_0) : a x' (t)+ b x(t) = 0

Théorème :

Si a et b sont deux constantes réelles avec a ≠ 0.
Alors **l'ensemble de solutions sur I de l'équation différentielle (E_0) : a x'(t) + b x(t) = 0** sont définies par :

$x_1(t) = K\,e^{-G(t)}$ avec K une constante réelle et G(t) une primitive de $\frac{b}{a}$

Exemple 3 :

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1') : x'(t) + 3 x(t) = 0 sur I = $\mathbb{R}$.
b) Résoudre l'équation différentielle (E_2') : 5y'(x) – 2 y(x) = 0 sur I = $\mathbb{R}$.

3. Solutions générales de l'équation différentielle (E) : ax'(t) + b x(t) = c(t)

Théorème :

La solution générale de l'équation différentielle du 1er ordre (E) : a x'(t)+ b x(t) = c(t) est obtenue en faisant

la **SOMME : f(t) + x_1(t) sachant que**

- f(t) est une solution particulière de (E) (c'est-à-dire qu'elle vérifie : a f '(t) + b f(t) = c(t))

- x_1(t) sont les solutions générales de (E_0) donc $x_1(t) = K\,e^{-G(t)}$ avec K une constante réelle et G(t) une primitive de $\frac{b}{a}$

Exemple 4 : On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $\frac{di}{dt}(t) - 2\ i(t) = -4t$

où i est une fonction de la variable t, dérivable de dérivée $\frac{di}{dt}$.

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire (E') : $\frac{di}{dt}(t) - 2\ i(t) = 0$
2. Vérifier que $j(t) = 2t + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur I.

4. Condition initiale :

Lorsqu'une équation différentielle provient de l'étude d'un système physique, celui-ci est soumis à une ou plusieurs conditions initiales (abrégé : CI), par exemple pour fixer l'origine des temps. Cela permet alors de trouver l'unique signal solution du système posé.

Théorème

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $ax'(t) + bx(t) = c(t)$ alors

il existe une **unique** solution de (E) vérifiant $\mathbf{x(t_0) = y_0}$.

On dit que $x(t_0) = y_0$ est une **condition initiale**.

Exemple 5 : On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $5y' - 6y = 6$ sur $\mathbb{R}$ où y est une fonction de la variable x, dérivable de dérivée y'.

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire (E') : $5y' - 6y = 0$
2. Trouver la fonction constante f, solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur $\mathbb{R}$
4. Déterminer la solution de (E) tel que $y(0) = 2$.

Map de synthèse :