

1. définition :

Définition :

On considère une fonction x définie par : $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto x(t) \end{cases}$, fonction dérivable sur I

Equation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $a x'(t) + b x(t) = c(t)$ avec a et b deux réels et $c(t)$ une fonction.

La fonction inconnue est $x(t)$ que l'on va chercher à déterminer en résolvant cette équation différentielle.

Equation différentielle du premier ordre sans second membre (E₀) : $a x'(t) + b x(t) = 0$

Une solution f de l'équation différentielle $a x'(t) + b x(t) = c(t)$ est telle que : $a f'(t) + b f(t) = c(t)$.

Exemple 1 :

On considère l'équation différentielle du premier ordre : $2x'(t) + x(t) = \frac{1}{2}$ (E)

- déterminer les valeurs de a ; b et $c(t)$.
- donner l'équation différentielle sans second membre (E₀).
- Vérifier que la fonction $x(t) = \frac{1}{2}$ est une solution de l'équation différentielle (E)

Exemple 2 :

- Trouver une fonction constante solution de : $4y' - y = 10$.
- Déterminer trois réels A, B, C tel que $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ soit solution de l'équation différentielle :
 $y' + y = 2x^2 + 3x - 2$.

Dans toute la suite, on note x la fonction que l'on va chercher.

x vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre noté (E):

$$a x'(t) + b x(t) = c(t) \text{ avec } a \text{ et } b \text{ 2 constantes et } c(t) \text{ une fonction.}$$

2. Résolution de l'équation différentielle sans second membre (E₀) : $a x'(t) + b x(t) = 0$ **Théorème :**

Si a et b sont deux constantes réelles avec $a \neq 0$.

Alors l'ensemble de solutions sur I de l'équation différentielle (E₀) : $a x'(t) + b x(t) = 0$ sont définies par :

$$x_1(t) = K e^{-G(t)} \text{ avec } K \text{ une constante réelle et } G(t) \text{ une primitive de } \frac{b}{a}$$

Exemple 3 :

- Résoudre l'équation différentielle (E₁') : $x'(t) + 3 x(t) = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.
- Résoudre l'équation différentielle (E₂') : $5y'(x) - 2 y(x) = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

3. Solutions générales de l'équation différentielle (E) : $ax'(t) + b x(t) = c(t)$ **Théorème :**

La solution générale de l'équation différentielle du 1^{er} ordre : (E) $a x'(t) + b x(t) = c(t)$ est obtenue en faisant

la **SOMME : $f(t) + x_1(t)$ sachant que**

- $f(t)$ est une solution particulière de (E) (c'est-à-dire elle vérifie : $a f'(t) + b f(t) = c(t)$)

- $x_1(t)$ sont les solutions générales de de (E₀) donc $x_1(t) = K e^{-G(t)}$ avec K une constante réelle et $G(t)$ une primitive de $\frac{b}{a}$

Exemple 4 : On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $\frac{di}{dt}(t) - 2 i(t) = -4t$

où i est une fonction de la variable t , dérivable de dérivée $\frac{di}{dt}$.

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire (E') : $\frac{di}{dt}(t) - 2 i(t) = 0$
2. Vérifier que $j(t) = 2t + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur \mathbb{I} .

4. Condition initiale :

Lorsqu'une équation différentielle provient de l'étude d'un système physique, celui-ci est soumis à une ou plusieurs conditions initiales (abrégé : CI), par exemple pour fixer l'origine des temps. Cela permet alors de trouver l'unique signal solution du système posé.

Théorème

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $ax'(t) + bx(t) = c(t)$ alors il existe une unique solution de (E) vérifiant $x(t_0) = y_0$.
On dit que $x(t_0) = y_0$ est une condition initiale.

Exemple 5 : On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $5y' - 6y = 6$ sur \mathbb{R} où y est une fonction de la variable x , dérivable de dérivée y' .

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire (E') : $5y' - 6y = 0$
2. Trouver la fonction constante f , solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur \mathbb{R}
4. Déterminer la solution de (E) tel que $y(0) = 2$.

Map de synthèse :

